

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\ln^m(1-x^2)}{1-x^2} dx = 2 \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\ln^m(1-x^2)}{1+x} dx + 2 \int_0^{1-\varepsilon} x \frac{\ln^m(1-x^2)}{1-x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{\ln^m(1-x^2)}{1+x} dx - \frac{1}{m+1} \ln^{m+1}(2\varepsilon). \quad (\text{C. 6})$$

Dabei haben wir quadratische Glieder in ε vernachlässigt und in allen konvergenten Ausdrücken ε gleich Null gesetzt. Die Berechnung des zweiten Integrals erfolgt in ähnlicher Weise wie bei den Ausdrücken (C 4) und (C 5).

Zunächst wird wieder der logarithmische Ausdruck zerlegt. Die Integrale der Form $\int_0^1 \frac{\ln^n(1+x)}{1+x} dx$ lassen sich so-

fort angeben. Bei den übrigen Integralen entwickeln wir $\ln(1-x)$ nach Potenzen von $(1+x)$ und führen dann die Integration gliedweise durch. Die dabei auftretenden unendlichen Summen lassen sich noch durch folgende transzendenten Ausdrücke

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^3} = \zeta(3), \quad (\text{C. 7 a})$$

$$\text{mit } \zeta(3) = 1,20\,205\,690, \quad (\text{C. 7 b})$$

zusammenfassen⁵⁵. Für die gesuchten Integrale ergibt sich schließlich

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-x^2)}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} (\ln 2\varepsilon)^2 - \frac{\pi^2}{6} + 2(\ln 2)^2, \quad (\text{C. 8})$$

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\ln^2(1-x^2)}{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} (\ln 2\varepsilon)^2 - \frac{2\pi^2}{3} \ln 2 + \frac{8}{3} (\ln 2)^3 + 4\zeta(3). \quad (\text{C. 9})$$

⁵⁵ I. c. ²², S. 7, 9 und 413.

Die Temperatur- und Geschwindigkeitsabhängigkeit der Verfestigung kubisch-flächenzentrierter Metalleinkristalle*

Von ROLF BERNER

Aus dem Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart,
und dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart
(Z. Naturforschg. 15 a, 689—706 [1960]; eingegangen am 20. Mai 1960)

In der vorliegenden Arbeit wurden Kupfer-, Gold- und Aluminiumeinkristalle gleicher Orientierung im Zugversuch verformt. Hierbei wurde die Temperaturabhängigkeit — bei Kupfer außerdem die Geschwindigkeitsabhängigkeit — des Verfestigungsverhaltens dieser Metalle untersucht. Aus der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Spannung τ_{III} , die für den Beginn der Quergleitung von Schraubenversetzungen charakteristisch ist, konnte nach einem von SEEGER, BERNER und WOLF angegebenen Verfahren die Stapelfehlerenergie für Kupfer ermittelt werden. Außerdem wurde durch diese Untersuchungen nachgewiesen, daß die für die Quergleitung zugrunde gelegte Theorie mit einem einzigen thermisch aktivierten Prozeß näherungsweise beschrieben werden kann. Durch Vergleich der Temperaturabhängigkeit von τ_{III} für Aluminium und Gold mit derjenigen von Kupfer konnte ferner auch die Stapelfehlerenergie für jene Metalle bestimmt werden.

An Gold wurden die Verfestigungsuntersuchungen noch durch Gleitlinienbeobachtungen ergänzt. Im Gegensatz zu Kupfer zeigten sich hierbei bereits im Bereich II Gleitlinien sehr unterschiedlicher Stärke. Die Stufenhöhen der relativ dicksten Gleitlinien konnten mit der Latex-Kügelchen-Methode, die ausführlich beschrieben wurde, gemessen werden; diese Messungen waren im Einklang mit dem theoretisch aus τ_{III} ermittelten Wert.

1. Einleitung und Problemstellung

Bei den Untersuchungen des Verfestigungsverhaltens von Einkristallen geht man in den meisten Fällen von der Messung der sog. Verfestigungskurve im Zugversuch aus. Bei kubisch-flächenzentrierten

Metalleinkristallen zeigt eine solche Kurve im allgemeinen drei unterscheidbare Bereiche¹, deren Charakterisierung wir durch die in Abb. 1 eingezeichneten Verfestigungskenngrößen darstellen wol-

* Dissertation, TH Stuttgart 1960.



len. Auf eine Interpretation dieser drei Bereiche soll hier nicht eingegangen werden, vielmehr sei hierzu einerseits auf zahlreiche an Kupfer, Nickel und Aluminium durchgeführte Einzelarbeiten¹⁻⁸ und andererseits auf die zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Kristallplastizität von SEEGER⁹ hingewiesen.

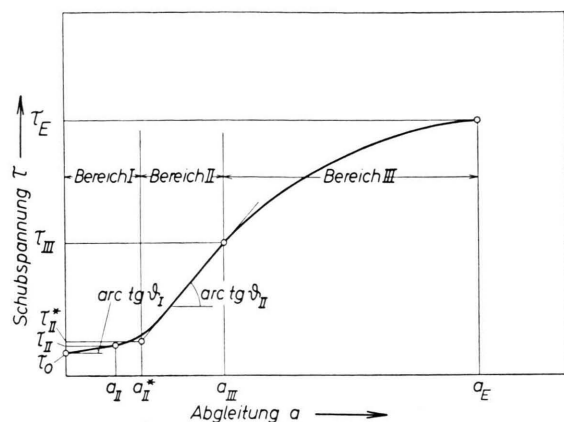


Abb. 1. Schematische Verfestigungskurve mit eingezeichneten Verfestigungskenngrößen.

Ein sehr wichtiger und vor allem für das verformte Metall spezifischer Parameter der Verfestigungskurve kubisch-flächenzentrierter Einkristalle ist die Stapelfehlerenergie. Diese Energie bestimmt nämlich die Breite des Stapelfehlerbandes, welches bei allen kubisch-flächenzentrierten Metallen von den aufgespaltenen Versetzungen aufgespannt wird und spielt somit bei allen jenen Erscheinungen der plastischen Verformung eine Rolle, bei welchen diese Aufspaltung der Versetzungen rückgängig gemacht werden muß.

Ein Beispiel hierfür ist die Quergleitung von Schraubenversetzungen, die nach DIEHL, MADER und SEEGER² für das Abbiegen der Verfestigungskurve am Ende des Bereichs II verantwortlich ist. Die gegen die LOMER-COTTRELL-Hindernisse gepreßten Schraubenversetzungen sind nämlich erst dann in der Quergleitebene gleitfähig, wenn an der betref-

fenden Stelle die aufgespaltene Versetzung zusammengedrückt worden ist. Mit Hilfe eines bei SEEGER, BERNER und WOLF¹⁰ beschriebenen einfachen Modells kann auf Grund dieser Vorstellungen über die Quergleitung von Schraubenversetzungen ein quantitativer Zusammenhang zwischen der Stapelfehlerenergie γ und der den Beginn des Bereichs III charakterisierenden Schubspannung τ_{III} angegeben werden. Für diesen Zusammenhang von γ und τ_{III} wurde, ausgehend von einer Theorie von SCHÖCK und SEEGER¹¹ und einem Vorschlag von HAASEN⁵, folgende Gleichung hergeleitet **:

$$\ln \frac{\tau_{III}(T)/G(T)}{\tau_{III}(0)/G(0)} = \frac{kT}{A(\gamma)} \ln \frac{\dot{a}}{\dot{a}_0}. \quad (1)$$

Hierbei ist \dot{a} die Abgleitgeschwindigkeit, \dot{a}_0 eine Konstante, die der DEBYE-Frequenz des jeweils betrachteten Metalls proportional ist, G der Schubmodul, $\tau_{III}(0)$ die für $T = 0^\circ\text{K}$ den Beginn des Bereichs III definierende Spannung, k die BOLTZMANNsche Konstante und $A(\gamma)$ eine von der Theorie gelieferte Funktion. Für die Größen $\tau_{III}(0)$ und A läßt sich nun im Zusammenhang mit der Aufspaltung der Versetzungen die Abhängigkeit von der Stapelfehlerenergie angeben; außerdem hängen diese beiden Größen auch noch von der Anzahl n der an einem Hindernis aufgestauten Versetzungen ab. Für $\tau_{III}(0)$ findet SEEGER¹² folgende Beziehung

$$\tau_{III}(0)/G(0) = \frac{2}{n} (0,056 - \gamma/Gb). \quad (2)$$

Die Abhängigkeit dieser Größe von γ ist jedoch wesentlich geringer als die von n ; $\tau_{III}(0)$ ist also in erster Linie eine Funktion von n ; diese Größe ist im Hinblick auf Oberflächenbeobachtungen sehr wichtig, da sich das aus $\tau_{III}(0)$ zu berechnende n im Oberflächenbild wiederfinden lassen muß. Der Zusammenhang von A mit γ und n konnte allerdings nicht in expliziter Form angegeben werden, sondern wurde numerisch von WOLF berechnet¹³. Im Gegensatz zu $\tau_{III}(0)$ zeigte es sich hier, daß man die Abhängigkeit von n für kleine Werte von n vernach-

¹ J. DIEHL, Z. Metallk. **47**, 331, 411 [1956].

² J. DIEHL, S. MADER u. A. SEEGER, Z. Metallk. **46**, 650 [1955].

³ A. SEEGER, J. DIEHL, S. MADER u. H. REBSTOCK, Phil. Mag. **2**, 323 [1957].

⁴ S. MADER, Z. Physik **149**, 73 [1957].

⁵ P. HAASEN, Phil. Mag. **3**, 384 [1958].

⁶ R. BERNER, Dipl.-Arbeit, TH Stuttgart 1957.

⁷ H. KRONMÜLLER, Z. Phys. **154**, 574 [1959].

⁸ J. MEISSNER, Z. Metallk. **50**, 207 [1959].

⁹ A. SEEGER, „Kristallplastizität“, in Hdbuch d. Physik, Bd. VII/2.

¹⁰ A. SEEGER, R. BERNER u. H. WOLF, Z. Phys. **155**, 247 [1959].

¹¹ G. SCHÖCK u. A. SEEGER, Conf. Defects Solids, Phys. Soc., Lond. 1955, S. 340.

** Die Herleitung dieser Beziehung sowie ihre praktische Anwendung wird im Anhang A besprochen.

¹² A. SEEGER, Dislocations and Mech. Properties of Crystals, edited by J. C. FISHER, W. C. JOHNSTON, R. THOMSON and T. VREELAND, John Wiley & Sons, New York 1957, S. 243.

¹³ H. WOLF, Z. Naturforschg. **15 a**, 180 [1960].

lässigen kann und daß die Größe A somit in erster Linie eine Funktion von γ ist.

Mit Hilfe von Gl. (1) wird der von HAASEN⁵ an Nickel und von BERNER⁶ an Kupfer experimentell gefundene Zusammenhang

$$\ln \tau_{III}/G = \ln \tau_{III}(0)/G(0) - BT \quad (3)$$

sehr gut erklärt, wobei sich für die experimentelle Konstante B folgende Gleichung anschreiben läßt:

$$B = \frac{k}{A} \ln \frac{\dot{a}_0}{\dot{a}}. \quad (4)$$

Nach SEEGER, BERNER und WOLF¹⁰ bietet sich auf Grund dieses in Gl. (1) angegebenen Zusammenhangs von γ und τ_{III} somit ein Verfahren an, das die experimentelle Ermittlung der Stapelfehlerenergie erlaubt. Mit Hilfe der aus der Temperaturabhängigkeit von τ_{III} gefundenen Konstanten B läßt sich nämlich nach Gl. (4) A berechnen und aus dem Zusammenhang von A und γ die Stapelfehlerenergie entnehmen. Allerdings ist hierzu noch die Kenntnis von \dot{a}_0 notwendig. Diese Verknüpfungsgröße von A und B kann aber relativ leicht ermittelt werden, indem man für ein bestimmtes kubisch-flächenzentriertes Metall außer der Temperaturabhängigkeit auch noch die Geschwindigkeitsabhängigkeit von τ_{III} bestimmt. Nach Gl. (1) läßt sich dann auch die Größe A experimentell angeben; \dot{a}_0 kann dann aus Gl. (3) berechnet werden und da diese Größe \dot{a}_0 nach SEEGER et al.¹⁰ für alle Metalle näherungsweise dieselbe ist, genügt es, \dot{a}_0 ein einziges Mal für irgendein beliebiges kubisch-flächenzentriertes Metall zu ermitteln. Für alle übrigen Metalle ist dann zur Bestimmung der Stapelfehlerenergie nur noch die Messung von B notwendig.

Wir haben das eben beschriebene Verfahren auf Kupfer, Gold und Aluminium angewandt. Hierzu wurden an einheitlich orientierten Einkristallen dieser Metalle bei verschiedenen Temperaturen Verfestigungskurven aufgenommen und insbesondere die Temperaturabhängigkeit der Kenngröße τ_{III} ermittelt. Bei Kupfer waren solche Messungen bereits vorhanden. An diesem Metall haben wir deshalb die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Verfestigung untersucht und hierbei einerseits die Verknüpfungskonstante \dot{a}_0 ermittelt und andererseits die Geschwindigkeitsabhängigkeit einiger spezieller Kenn-

größen, insbesondere diejenige der kritischen Schubspannung, gemessen.

An Goldkristallen haben wir ferner elektronenmikroskopische Gleitlinienbeobachtungen (wie sie an Kupfer⁴ und Aluminium^{3, 14, 15} bereits vorlagen) sowie eine genaue Untersuchung des Überschießens der Stabachse über die Symmetrale (vgl. SACHS und WEERTS¹⁶) durchgeführt.

2. Experimentelle Verfahren

a) Herstellung und Behandlung der Einkristalle

Alle Einkristalle wurden in Form zylindrischer Stäbe von 4 mm Durchmesser und etwa 70–90 mm Länge in dem von BRIDGMAN angegebenen und von DIEHL¹ und BERNER⁶ ausführlich beschriebenen Schmelzflußverfahren hergestellt.

Folgende Ausgangsmaterialien standen für die Herstellung der Einkristalle zur Verfügung:

Aluminium 99,99%, Elektrolytkupfer *** 99,98%
und Gold 99,998%.

Sämtliche Kristalle besaßen auf etwa 2° genau dieselbe Ausgangsorientierung; als diese wurde die bereits von DIEHL¹ und später auch von BERNER⁶ verwendete C14-Orientierung gewählt. Diese Orientierung besitzt bei gegebener Zugspannung die größtmögliche Schubspannung im Hauptgleitsystem und zeigt außerdem bei der Verformung im Zugversuch über einen großen Bereich Einfachgleitung. Kupferimpflinge dieser Orientierung waren von früheren Arbeiten her noch vorhanden. Bei den Gold- und Aluminiumkristallen dagegen wurde diese Orientierung durch Schrägimpfen mit zufällig gewachsenen Kristallen hergestellt.

Die bei der Züchtung von Aluminiumkristallen entstehende Oxydhaut wurde mit heißer konzentrierter Natron- oder Kalilauge entfernt; zur kristallographischen Ätzung der Aluminiumkristalle wurde ebenso wie bei den Kupferkristallen verdünntes Königswasser verwendet. Die Kupferkristalle wurden dann noch mit 10-proz. Ammoniumpersulfatlösung etwa 10 min nachgeätzt. Die Ätzung der Goldkristalle erfolgte mit erwärmter verdünnter Salzsäure.

b) Messung der Verfestigungskurve

Die Verformung der Einkristalle im Zugversuch wurde an der von BERNER⁶ gebauten POLANYI-Apparatur durchgeführt. Bei den Versuchen, bei welchen die Temperaturabhängigkeit des Verfestigungsverhaltens untersucht werden sollte, war die Verformungsgeschwindigkeit der Maschine auf $3,4 \cdot 10^{-3}$ cm/sec eingestellt. Die hierzu gehörige Abgleitgeschwindigkeit lag zwischen 6 und $9 \cdot 10^{-3}$ sec⁻¹. Für die Untersuchungen der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Verfestigungskurve

¹⁴ T. S. NOGGLE, Diss., University of Illinois 1955.

¹⁵ T. S. NOGGLE u. I. S. KOEHLER, J. Appl. Phys. **28**, 53 [1957].

¹⁶ G. SACHS u. J. WEERTS, Z. Phys. **62**, 473 [1930].

*** Dasselbe Elektrolytkupfer wurde auch in den früheren Arbeiten der Stuttgarter Schule^{1–4} zur Herstellung von Kupfereinkristallen verwendet.

wurde zwischen Antriebsmotor und Zugmaschine ein Getriebe geschaltet, das eine Variation der Verformungsgeschwindigkeit um 6 Zehnerpotenzen von 3,4 cm/sec bis $3,4 \cdot 10^{-6}$ cm/sec erlaubte. Die Messung der Spannung und Dehnung, ebenso die Umrechnung von Kraft und Dehnung auf Schubspannung und Abgleitung erfolgte in der von BERNER⁶ angegebenen Weise.

Um die für eine genaue Messung der kritischen Schubspannung notwendige sorgsame Vorbehandlung der Kristalle zu gewährleisten, sollten nach DIEHL¹ und BERNER⁶ die Proben bei der Befestigung in der Apparatur nicht geklemmt, sondern eingelötet werden. Im Rahmen der speziellen Untersuchungen der Geschwindigkeitsabhängigkeit von τ_0 bei Kupfer mußte allerdings auf das Einlöten der Kristalle bei extrem schnellen und extrem langsamen Verformungsgeschwindigkeiten verzichtet werden, und zwar weil bei den letzteren bereits bei sehr niedrigen Lasten ein Losbrechen der Lötung auftrat und bei den schnellen Geschwindigkeiten ein Abschalten der Apparatur zum Zwecke des Umspannens nicht möglich war.

Auch bei den meisten Goldkristallen mußte vom Einlöten der Proben abgesehen werden. Das Lötten der Goldkristalle bereitete nämlich Schwierigkeiten, da Gold bei erhöhter Temperatur eine große Neigung zeigt, sich mit Zinn zu legieren.

Die verschiedenen Verformungstemperaturen wurden mit folgenden Temperaturbädern und Einrichtungen hergestellt:

Flüssiger Sauerstoff (Siedepunkt 90 °K), gelbbares Pentanbad oder Alkoholbad (150–290 °K), gelbbares Wasserbad (290–370 °K), gelbbares Ölbad (300 bis 480 °K); Verformungen bei noch höheren Temperaturen wurden an der von DIEHL¹ gebauten Apparatur, bei der ein Widerstandsofen Temperaturen bis etwa 800 °K gestattete, durchgeführt. Die beste Temperaturkonstanz

erreichte man mit dem Wasser- und Ölbad ($\pm 0,2^\circ$); der Widerstandsofen zeigte Temperaturschwankungen von ca. $\pm 3^\circ$ und das Pentan- bzw. Alkoholbad solche bis etwa $\pm 5^\circ$. In allen Temperaturbereichen wurde die Temperatur mit einem Thermoelement gemessen und eventuelle Abweichungen der Temperatur vom Sollwert wurden korrigiert.

c) Elektronenmikroskopische Aufnahmen ****

Die Gleitlinienbilder wurden nach dem von MADER angegebenen Verfahren hergestellt. Der zu untersuchende Kristall wurde bei Raumtemperatur stufenweise verformt, wobei man vor jeder Verformungsstufe die Probe elektrolytisch polierte. Für Gold hat sich ein Bad einer 10–20-proz. wäßrigen Kaliumcyanidlösung recht gut bewährt. Das Bad wurde mit einer Platinkathode bei etwa 10 V und einer Stromstärke von 7 A/cm² bei 95–100 °C betrieben. Nach jeder Verformung stellte man durch Aufdampfen von Kohle einen Abdruck der Kristalloberfläche her. Um diesen Abdruck vom Kristall ablösen zu können, wurde die Kohleschicht mit Colloidum, das man hernach wieder entfernte, verstärkt. Zur Kontraststeigerung wurde dann der Abdruck mit Palladium schräg bedampft. Als Elektronenmikroskop stand ein Gerät des Typs „Elmiskop I“ der Firma Siemens & Halske zur Verfügung.

3. Messungen an Kupfer

a) Die Geschwindigkeitsabhängigkeit von τ_{III}

Zur Demonstration des Meßverfahrens für τ_{III} haben wir in Abb. 2 fünf beliebig herausgegriffene Verfestigungskurven verschiedener Abgleitgeschwindigkeit, die bei $T = 295^\circ\text{K}$ gemessen wurden, auf-

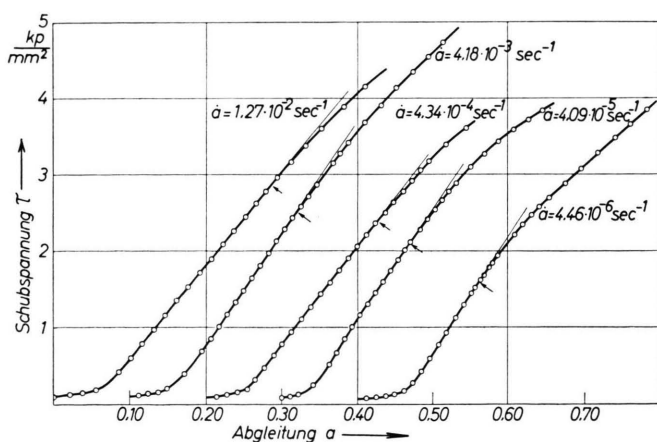


Abb. 2. Kupferverfestigungskurven verschiedener Abgleitgeschwindigkeit bei $T = 295^\circ\text{K}$.

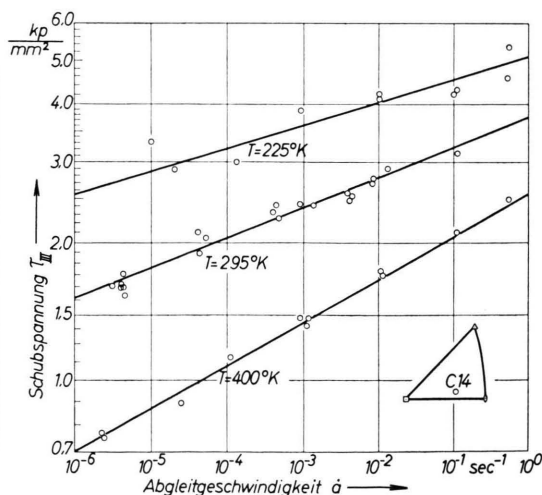


Abb. 3. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit von τ_{III} für verschiedene Temperaturen bei Kupfer.

**** Die Präparation und Herstellung der Aufnahmen besorgte in dankenswerter Weise Fräulein M. RAPP.

getragen. Bei genügend dichter Belegung der Kurven durch Meßpunkte ist es in den meisten Fällen möglich, wie aus Abb. 2 zu ersehen ist, die Spannung auf $\pm 0,1$ kp/mm² oder genauer anzugeben.

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit von τ_{III} für Kupfer wurde für die Temperaturen $T = 225^\circ\text{K}$, 295°K und 400°K untersucht und in Abb. 3 zusammengestellt. Bei den Temperaturen $T = 225^\circ\text{K}$ und 400°K wurden hierzu jeweils zehn und bei $T = 295^\circ\text{K}$ einundzwanzig Kristalle verformt. Die Streuung der Meßpunkte ist bei den verschiedenen Temperaturen sehr unterschiedlich; am stärksten tritt sie, obwohl wie oben angegeben Temperaturschwankungen korrigiert wurden, bei $T = 225^\circ\text{K}$ in Erscheinung. Die in Abb. 3 eingezeichneten Geraden wurden mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate aus den Meßpunkten berechnet. In Tab. 1 haben wir die Anstiege M dieser Geraden und die aus der Streuung berechneten relativen Fehler dieser Anstiege angegeben.

| T [°K] | $M = \frac{kT}{A}$ | $\Delta M/M$ [%] | $F(T)$ | $M = \frac{kT}{A(0)}$ | $A(0)$ [eV] |
|-------------|--------------------|---------------------|--------|-----------------------|----------------|
| 225 | 0,0489 | 30,1 | 0,953 | 0,0466 | 0,415 |
| 295 | 0,0663 | 12,7 | 0,930 | 0,0617 | 0,413 |
| 400 | 0,0993 | 4,2 | 0,892 | 0,0832 | 0,414 |

Tab. 1. Zusammenstellung der aus Abb. 3 entnommenen Größen.

Die aus Abb. 3 entnommenen und in Tab. 1 zusammengestellten Werte für M , die nach der Theorie kT/A entsprechen, haben wir mit Hilfe von Gl. (A 7) auf $kT/A(0)$ umgerechnet und ebenfalls zusammen mit dem in Gl. (A 8) definierten Korrekturfaktor $F(T)$ in Tab. 1 angeführt. Die so korrigierten Werte sind in Abb. 4 über der Temperatur aufgetragen. Die dimensionslose Temperaturfunktion $F(T)$ wurde numerisch ermittelt; die Temperaturabhängigkeit von b wurde hierzu aus den Messungen der Gitterkonstanten an Kupfer von NIX und McNAIR¹⁷ entnommen und die des Schubmoduls nach dem von SEEGER und SCHÖCK¹⁸ angegebenen Modul für die Wechselwirkung von Schraubenversetzungen aus den von OVERTON und GAFFNEY¹⁹ gemessenen elastischen Konstanten berechnet. Wie aus Abb. 4 zu entnehmen ist, liegen die Werte $kT/A(0)$ sehr gut auf einer Geraden und bestätigen somit die Erwartung, daß $A(0)$ und damit auch die dimensionslose Größe

A/Gb^3 unabhängig von der Temperatur ist. Zur Demonstration des Einflusses der Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten haben wir in Abb. 4 auch noch die nicht korrigierten Werte kT/A

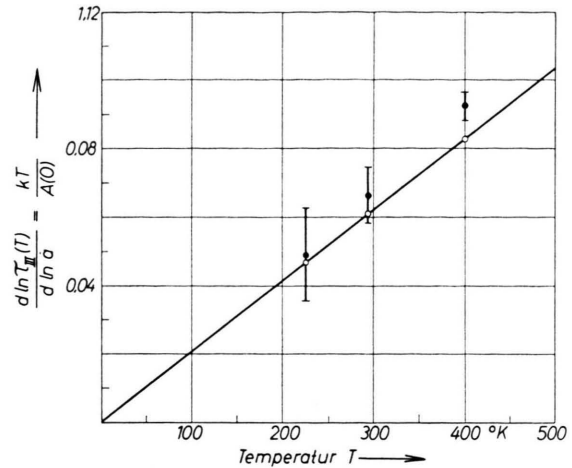


Abb. 4. Darstellung von $d \ln \tau_{III} / d \ln \dot{a}$ über T zur Demonstration der Temperaturunabhängigkeit von $A(0)$. ● unmittelbare Meßwerte mit Angabe der Streubreite; ○ unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten korrigierte Werte für kT/A .

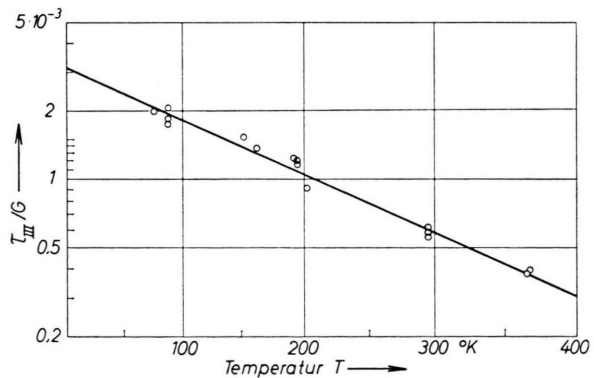


Abb. 5. Temperaturabhängigkeit von τ_{III}/G für Kupfer mit verzerrtem Temperaturmaßstab.

mit eingezeichnet. Aus dem Anstieg dieser Nullpunktsggeraden bzw. aus den in Tab. 1 berechneten Werten für $A(0)$ ergibt sich somit folgender Mittelwert:

$$A(0) = 0,414 \text{ eV}$$

bzw. in dimensionsloser Schreibweise:

$$Gb^3/A = 11,3.$$

Zur Bestimmung von B bzw. $B(0)$ greifen wir auf die Messungen von BERNER⁶ zurück. In Abb. 5 ha-

¹⁷ F. C. NIX u. D. McNAIR, Phys. Rev. **60**, 597 [1941].

¹⁸ A. SEEGER u. G. SCHÖCK, Acta Met. **1**, 519 [1953].

¹⁹ W. C. OVERTON u. J. GAFFNEY, Phys. Rev. **98**, 969 [1955].

ben wir diese Messungen noch einmal aufgetragen. Dabei wurde nach der in Gl. (A 10) angegebenen Temperaturabhängigkeit von τ_{III} die Größe τ_{III} nicht wie seither über T , sondern über $T/F(T)$ aufgetragen. Die hieraus ebenfalls mit der Methode der kleinsten Quadrate ermittelten Werte für $B(0)$ und $\tau_{III}(0)$ sind

$$B(0) = 5,20 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$$

und

$$\tau_{III}(0) = 14,6 \text{ kp/mm}^2;$$

wegen den im Anhang besprochenen Korrekturen weichen diese Werte ein wenig von den bei SEEGER, BERNER und WOLF¹⁰ angegebenen [$B(0) = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$ und $\tau_{III}(0) = 15,1 \text{ kp/mm}^2$] Werten ab. Bei der Ermittlung dieser Größen aus der Darstellung in Abb. 5 wurden Meßpunkte, die über 400 °K lagen, nicht mehr berücksichtigt. Diese Vernachlässigung ist berechtigt, da nämlich nach Abb. 8 bei WOLF¹³ solche Spannungen, die kleiner als etwa $5 \cdot 10^{-4} G$ sind, keinen linearen Zusammenhang von $\ln \tau/G$ und U mehr ergeben.

Setzen wir nun diese Werte für $A(0)$ und $B(0)$ in Gl. (4) ein, so erhalten wir für Kupfer folgende temperaturunabhängige Verknüpfungskonstante

$$\ln(\dot{\alpha}_0 \cdot 1 \text{ sec}) = 18,0.$$

Zur Bestimmung von γ gehen wir mit dem oben angegebenen Wert für $G b^3/A$ in die Abb. 10 der WOLF'schen Arbeit¹³ ein und entnehmen

$\gamma/G b = 15,4 \cdot 10^{-3}$ bzw. $\gamma(295^\circ \text{K}) = 163 \text{ erg/cm}^2$. Die Konstante $\gamma/G b$ ist ebenso wie $A/G b^3$ temperaturunabhängig; lediglich der Absolutwert von γ zeigt eine mit $G b$ gehende geringe Temperaturabhängigkeit.

Der auf diese Weise gefundene Wert für die Stappfehlerenergie weicht sehr stark von dem Wert ab, der in früheren Arbeiten aus der Zwillingsenergie zu $\gamma = 40 \text{ erg/cm}^2$ abgeschätzt wurde.

b) Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der kritischen Schubspannung

In den Abb. 6 a – 6 c wurde die kritische Schubspannung in Abhängigkeit von der Abgleitgeschwindigkeit für die Temperaturen $T = 225^\circ \text{K}$, 295°K und 400°K aufgetragen. Wählt man bei der Auftragung von $\dot{\alpha}$ einen logarithmischen Maßstab, dann lassen sich in allen drei Fällen durch die Meßpunkte mit recht guter Näherung Geraden legen. Man findet experimentell also eine Beziehung von der Form

$$\tau_0 = \tau^* + m \cdot \ln \dot{\alpha}, \quad (5)$$

wo τ^* und m konstante Größen sind. Diese Beobachtung läßt sich sehr gut mit der von SEEGER²⁰ an-

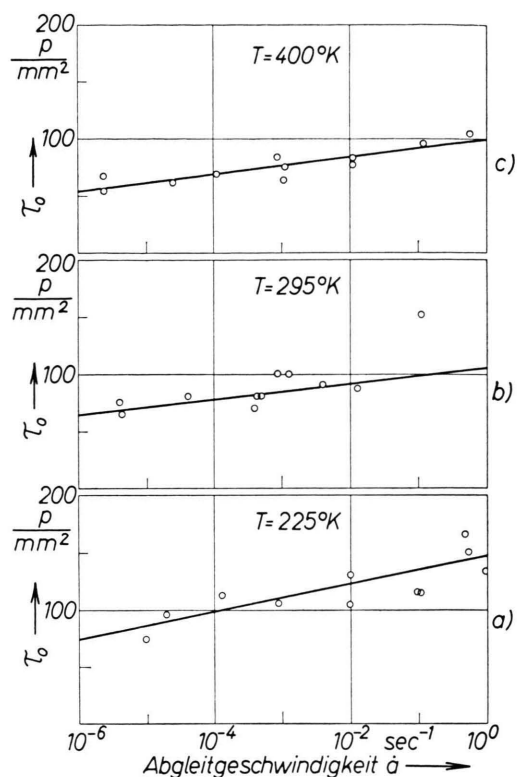


Abb. 6. Geschwindigkeitsabhängigkeit der krit. Schubspannung von Kupfer; a) $T = 225^\circ \text{K}$, b) $T = 295^\circ \text{K}$ und c) $T = 400^\circ \text{K}$.

gegebenen Theorie der kritischen Schubspannung bzw. Fließspannung vereinbaren. Danach gilt nämlich für τ_0 folgende Gleichung

$$\tau_0 = \tau_G + \frac{U_0}{v} - \frac{kT}{v} \ln(N F b v_0) + \frac{kT}{v} \ln \dot{\alpha}; \quad (6)$$

hierbei ist U_0 die für die jeweiligen Schneidprozesse notwendige Aktivierungsenergie, N die Zahl der Versetzungen pro Volumeneinheit, die an Hindernissen aufgehalten werden, F die während und nach einer Durchschneidung von einem Versetzungsstück überstrichene Fläche, v_0 eine charakteristische Frequenz von der Größenordnung der DEBYE-Frequenz und v , auch Aktivierungsvolumen genannt, eine Abkürzung für das Produkt

$$v = b d l, \quad (7)$$

²⁰ A. SEEGER, Phil. Mag. **46**, 1194 [1955].

in dem l der mittlere Abstand der zu schneidenden Versetzungen und d eine Länge, die etwa dem Durchmesser der zu schneidenden Versetzungen entspricht. Durch Vergleich der experimentellen (5) mit der theoretischen Gl. (6) findet man

$$m = k T / v, \quad (8)$$

$$\tau^* = \tau_G + \frac{U_0}{v} \frac{k T}{v} \ln(N F b v_0). \quad (9)$$

Aus Gl. (8) läßt sich dann das Aktivierungsvolumen v berechnen. In Tab. 2 sind die auf diese Weise ermittelten Werte v zusammen mit den gemessenen Größen m und τ^* für die verschiedenen Temperaturen zusammengestellt.

| T [°K] | τ^* [p/mm ²] | m [p/mm ²] | v [cm ³] |
|----------|-------------------------------|--------------------------|------------------------|
| 225 | 145 | 5,0 | $6,33 \cdot 10^{-20}$ |
| 295 | 110 | 3,85 | $10,9 \cdot 10^{-20}$ |
| 400 | 103 | 4,0 | $14,1 \cdot 10^{-20}$ |

Tab. 2. Zusammenstellung der aus Abb. 6 entnommenen und in den Gl. (7) bis (9) definierten Werte.

c) Die Geschwindigkeitsabhängigkeit weiterer Verfestigungskenngrößen

a) Die Ausdehnung des Bereichs I

Die für die Ausdehnung des Bereichs I charakteristische Größe a_{II} bzw. a_{II}^* (siehe hierzu Abb. 1) wurde in Abb. 7 für die Temperaturen $T = 295^\circ\text{K}$ und 400°K in Abhängigkeit von $\ln \dot{a}$ aufgetragen.

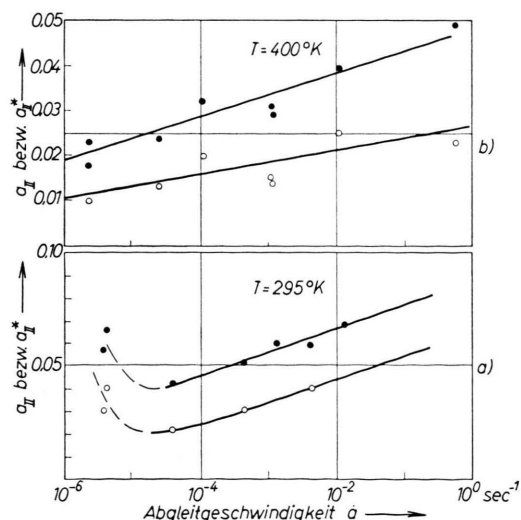


Abb. 7. Geschwindigkeitsabhängigkeit von a_{II} und a_{II}^* für verschiedene Temperaturen: a) $T = 295^\circ\text{K}$, b) $T = 400^\circ\text{K}$, \circ a_{II} -Werte, \bullet a_{II}^* -Werte.

Auf die Darstellung für $T = 225^\circ\text{K}$ wurde wegen der schon mehrfach erwähnten starken Streuung verzichtet. Von zwei Meßpunkten abgesehen, die bei $T = 295^\circ\text{K}$ aus dem Gesamtbild herausfallen, zeigen diese Messungen eine beinahe lineare Zunahme von a_{II} mit $\ln \dot{a}$. Diese Zunahme, die auch von MICHELITSCH²¹ bei Kriechversuchen an Kupfer beobachtet wurde, wird mit Hilfe von Gl. (6) sofort verständlich: Die Ausdehnung von Bereich I wird nämlich um so größer, je später die LOMER-COTTRELL-Versetzungen, die durch das Mitgleiten der sekundären Systeme entstehen, gebildet werden. Der τ_s -Anteil für die latenten Systeme nimmt aber nach Gl. (6) mit zunehmendem \dot{a} zu und somit beginnt wegen der Erhöhung der kritischen Schubspannung der latenten Systeme das Mitgleiten dieser später.

β) Der Bereich II

Die von MICHELITSCH²¹ bei Kriechversuchen an Kupfer und Nickel gemachte Beobachtung, daß der Bereich II nicht streng linear, sondern anfangs etwas steiler ist, konnte auch bei unseren dynamischen Versuchen bestätigt werden. In Abb. 8 a und 8 b wurden die beobachteten Erscheinungen über $\ln \dot{a}$ dargestellt. Dabei ist ϑ_{II1} die Steigung des steileren und ϑ_{II2} die des flacheren Bereichs II. Mit τ_k wurde die Spannung bezeichnet, bei welcher der Knick im Bereich II auftrat, und $\Delta\vartheta$ ist die Differenz $\vartheta_{II1} - \vartheta_{II2}$. Der Einfachheit wegen wurden die Effekte nur für

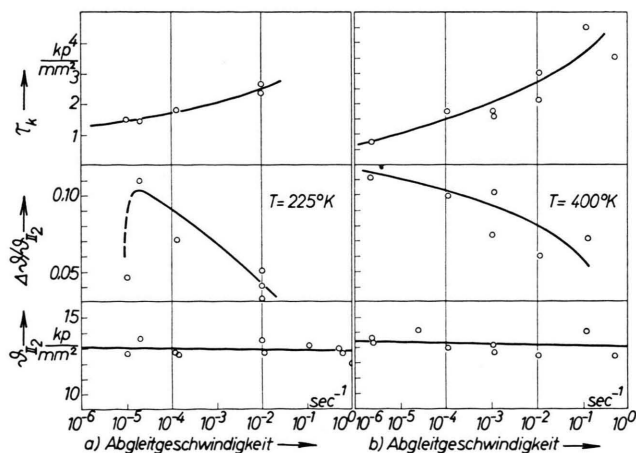


Abb. 8. Geschwindigkeitsabhängigkeit einiger Kenngrößen des Bereichs II an Kupfer für verschiedene Temperaturen; a) $T = 225^\circ\text{K}$, b) $T = 400^\circ\text{K}$.

²¹ M. MICHELITSCH, Z. Metallk. 50, 548 [1959].

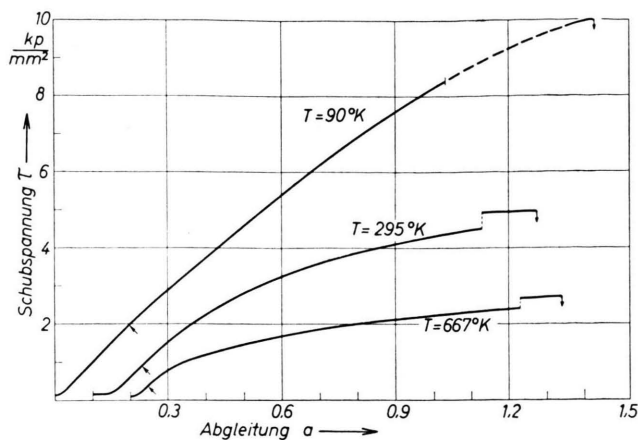


Abb. 9 a.

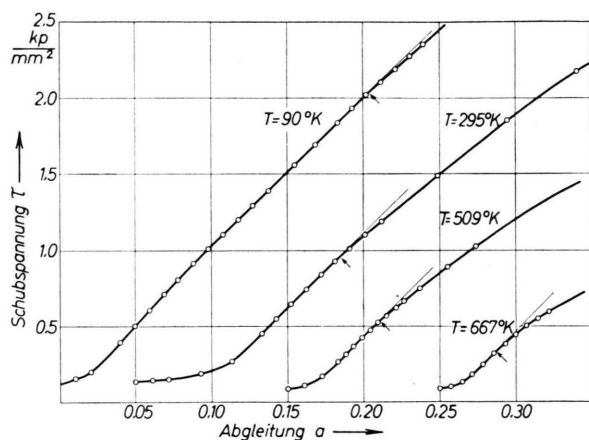


Abb. 9 b.

Abb. 9. Verfestigungskurven von Goldeinkristallen bei verschiedenen Temperaturen: $\dot{a} \sim 9 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$; die Pfeile bezeichnen τ_{III} . a) Gesamtverlauf bis zum Bruch (senkrechte Pfeile); b) Vergrößert herausgezeichnete Anfangsteile.

zwei Temperaturen aufgeführt. Der zweite Teil des Bereichs II, der durch die Größe ϑ_{II_2} charakterisiert wurde, war im allgemeinen länger als der erste und ϑ_{II_2} unabhängig von der Geschwindigkeit. Eine geringe Abhängigkeit von \dot{a} beobachtete man dagegen bei ϑ_{II_1} , welche in der Darstellung von $\Delta\vartheta/\vartheta_{II_2}$ zum Ausdruck kommt. Nach MICHELITSCH ist $\Delta\vartheta/\vartheta_{II}$ bei $\dot{a} \sim 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$ etwa 16%; ziemlich denselben Wert beobachteten wir für dieselbe Abgleitgeschwindigkeit bei $T = 295^\circ\text{K}$. Eine relativ starke Geschwindigkeits- und Temperaturabhängigkeit zeigte die Größe τ_k , wobei die Abhängigkeit dieser Größe von \dot{a} und T qualitativ ähnlich wie bei der Kenngröße τ_{III} verläuft, so daß man hier einen der Quergleitung von Schraubenversetzungen ähnlichen Prozeß erwartet.

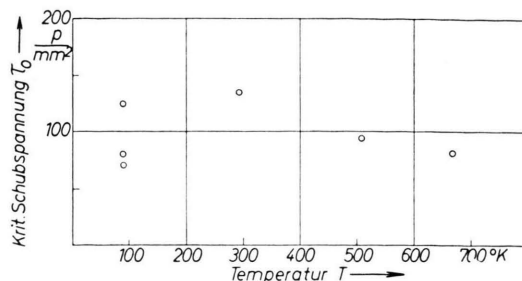


Abb. 10. Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung für Gold.

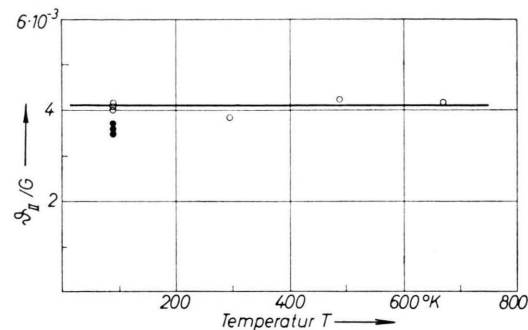


Abb. 11. Temperaturabhängigkeit des dimensionslosen Verfestigungskoeffizienten für Bereich II bei Gold.

4. Die Verfestigung von Gold

a) Verfestigungskurven

Zur Untersuchung des Verfestigungsverhaltens von Gold wurden sechs Kristalle einheitlicher Orientierung im Zugversuch verformt, und zwar drei bei 90°K und je einer bei den Temperaturen 295°K , 509°K und 667°K . Die Verfestigungskurven dieser Messungen sind in Abb. 9 a und 9 b aufgezeichnet. Die verschiedenen Verfestigungskenngrößen wurden in Tab. 3 zusammengestellt und zum Teil in den Abb. 10–12 über der Temperatur aufgetragen.

Die kritische Schubspannung, die von Kristall zu Kristall, vermutlich durch die oben erwähnte starke Beanspruchung der Proben beim Anbringen der Klemmfassungen, sehr stark schwankte, ist, wie Abb. 10 zeigt, wenig temperaturabhängig.

Auf eine graphische Auftragung der die Ausdehnung des Bereichs I kennzeichnenden Größe a_{II} haben wir, ebenso wie auf die Anführung dieser Größe in Tab. 3, verzichtet. Die Ausdehnung des Bereichs I war nämlich in den meisten Fällen so gering, daß quantitative Angaben nicht sinnvoll erschienen.

In Abb. 11 wurde ϑ_{II}/G aufgetragen. Die Temperaturabhängigkeit von G , die vor allem auch bei der

mittels der röntgenographischen Drehkristallmethode die Orientierung bestimmt und in Abb. 13 eingezeichnet wurde. Wegen der Ungenauigkeit des Verfahrens ist es zunächst nicht eindeutig erwiesen, daß der Kristall zwischen der 8. und der 10. Verformungsstufe nicht noch einmal überschießt. Die lichtmikroskopischen Oberflächenaufnahmen in Abb. 14 a und 14 b dürften jedoch klar für den eingezeichneten Achsenpfad sprechen. Abb. 14 a ist nach der 4. Verformungsstufe gemacht worden und zeigt nur andeutungsweise ein schwaches Mitgleiten des sekundären Systems, wogegen in Abb. 14 b, die nach der 6. Verformungsstufe gemacht wurde, bereits ein sehr starkes Gleiten beider Gleitsysteme zu beobachten ist.

b) Die Bestimmung der Stapelfehlerenergie

Da das Hauptziel unserer Messungen an Goldkristallen der Bestimmung der Stapelfehlerenergie galt, wurde bei der Auswertung der Verfestigungskurven besondere Aufmerksamkeit auf die Ermittlung von τ_{III} verwendet. Die Meßwerte von τ_{III} sind in Abb. 15 in der reduzierten Form τ_{III}/G über $T/F(T)$ aufgetragen. Um die temperaturunabhängige Größe $A(0)$ ermitteln zu können, war es auch hier notwendig, den Temperaturmaßstab wie in Abb. 5 bei Kupfer mit Hilfe der in Gl. (A 8) definierten Funktion $F(T)$ zu verzerren. Ferner fiel hier die Temperaturabhängigkeit von G , wegen der bei Gold relativ geringen Temperaturabhängigkeit von τ_{III} sehr stark ins Gewicht. Die Temperaturabhängigkeit des Schubmoduls wurde hierzu in der im letzten Abschnitt angegebenen Weise bestimmt und diejenige von b den Messungen von NIX und McNAIR¹⁷ und EBERT²³ entnommen.

Wegen der relativ geringen Zahl eigener Messungen haben wir in Abb. 15 auch noch die von ANDRADE und HENDERSON²⁴ mitgeteilten Verfestigungskurven verwertet. Da bei dieser Arbeit keine einheitliche Orientierung der Kristalle und schon gar keine mittlere Orientierung wie bei uns vorlag,

| T [°K] | τ_{III} [kp/mm ²] | Korrekturfaktor | $\tau_{III \text{ kor.}}$ [kp/mm ²] | $10^4 \tau_{III \text{ kor.}}/G$ |
|-------------|---------------------------------------|-------------------|--|----------------------------------|
| 90 | 2,4–2,5 | 0,76 | 1,85 | 6,88 |
| 193 | 1,6 | 0,83 ₃ | 1,33 | 5,09 |
| 290 | 0,75 | 0,83 ₃ | 0,62 | 2,46 |
| 608 | 0,6–0,7 | 0,59 | 0,38 | 1,67 |
| 687 | 0,3 | 0,83 ₃ | 0,25–0,3 | 1,24 |

Tab. 4. Aus ANDRADE und HENDERSON entnommene τ_{III} -Werte für Gold.

wurden mit Hilfe der von DIEHL¹ untersuchten Orientierungsabhängigkeit an Kupfer die Werte von ANDRADE und HENDERSON umgerechnet. In Tab. 4 wurden die auf diese Weise korrigierten Werte für τ_{III} zusammen mit den ursprünglich von den Verfassern gemessenen Werten angegeben. Diese Punkte liegen sehr gut, von einem Meßpunkt abgesehen, auf der von uns gemessenen Geraden.

Aus dem sehr guten linearen Zusammenhang von $\ln \tau_{III}/G$ und $T/F(T)$ in Abb. 15 entnehmen wir folgende Werte:

$$B(0) = 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$$

$$\text{und } \tau_{III}(0) = 2,23 \text{ kp/mm}^2.$$

Gl. (4) liefert dann

$$G b^3/A = 4,06.$$

Dieser Punkt fällt aus dem von WOLF¹³ erfaßten Bereich heraus. Wenn man die Angaben extrapoliert, was sicherlich zu kleine Werte von γ ergibt, dann bekommt man:

$$\gamma/G b = 1,48 \quad \text{bzw.} \quad \gamma \approx 10 \text{ erg/cm}^2.$$

c) Oberflächenuntersuchungen

Nach Gl. (2) läßt sich aus der Messung von $\tau_{III}(0)$ die Zahl der Versetzungen berechnen, die in einer Aufstauung enthalten sind. Aus dem im letzten Abschnitt angegebenen Wert für Gold findet man

$$n = 116 b.$$

Da sich diese Stufenhöhe in den Gleitlinienbildern wiederfinden lassen muß, haben wir nach der in Abschnitt 2 näher beschriebenen Methode elektronenmikroskopische Gleitlinienuntersuchungen ange stellt. Zu diesem Zweck wurde ein Goldkristall bei Raumtemperatur stufenweise verformt und nach jeder Verformungsstufe mittels des Abdruckverfahrens

| Verformungsintervall | Abgleitung in % von bis | Abgleitungsintervall Δa in % | Mittlere Stufenhöhe [10 ⁻⁸ cm] | Mittlere Gleitlinienlänge [10 ⁻⁴ cm] |
|----------------------|-------------------------|--------------------------------------|---|---|
| 1 | 0 — 8,2 | 8,2 | 14 | — |
| 2 | 8,2 — 11,5 | 3,3 | 20 | 9,4 |
| 3 | 11,5 — 16,3 | 4,8 | 18 | 8,2 |
| 4 | 16,3 — 20,0 | 3,7 | 60 | 8 |
| 5 | 20,0 — 27,2 | 7,2 | 54 | 6,3 |
| 6 | 27,2 — 28,9 | 1,7 | 65 | 7,1 |

Tab. 5. Gleitlinientabelle für Gold bei Raumtemperatur.

²³ H. EBERT, Z. Phys. **47**, 712 [1928].

²⁴ E. N. DA C. ANDRADE u. L. HENDERSON, Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. **244**, 177 [1951].

rens ein Bild der Kristalloberfläche hergestellt. In Tab. 5 sind mittlere Stufenhöhe und mittlere aktive Gleitlinienlänge der einzelnen Verformungsintervalle aufgetragen.

Wie aus dieser Tabelle zu entnehmen ist, wird der oben angegebene große Wert für n aus den Messungen der durchschnittlichen Stufenhöhe bei weitem nicht erreicht. Bei Kupfer dagegen stimmt der aus $\tau_{III}(0)$ ⁶ ermittelte Wert ($n = 24 b$) recht gut mit dem aus Oberflächenbeobachtungen ⁴ gefundenen ($n = 20 b$) überein.

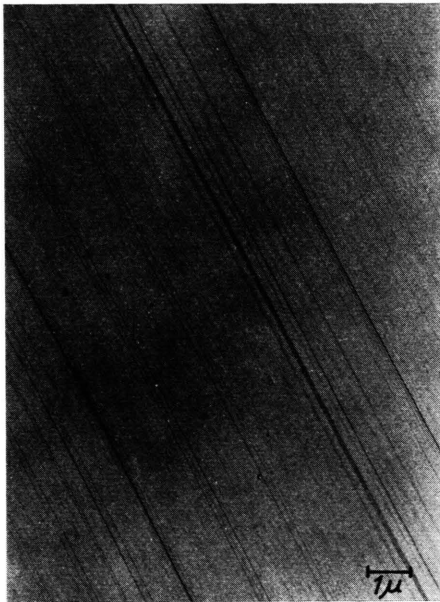


Abb. 16. Elektronenmikroskopische Aufnahme aus Bereich II an Gold.

Dieser Unterschied zwischen Gold und Kupfer wird verständlich, wenn wir Oberflächenaufnahmen aus dem Bereich II von beiden Metallen miteinander vergleichen (siehe Abb. 16 und Bild 4 bei MADER ⁴). Im Gegensatz zu Kupfer zeigen hierbei die Gleitlinien auf Gold eine starke Dispersion in ihrer Stärke. Da durch Spannungsvervielfachung mit zunehmender Zahl der Versetzungen in einer Aufstauung die Spannung auf die vorderste Versetzung wächst, beobachtet man Quergleitung in den meisten Fällen an den relativ dicksten Linien; aus diesem Grunde können die bei Gold gefundenen starken Linien die zur Quergleitung notwendige Stufenhöhe bereits erreicht haben, obwohl die durchschnittliche Stufenhöhe wesentlich niedriger liegt.

Um bei Gold einen quantitativen Vergleich mit dem theoretisch ermittelten Wert ($n = 116$) durch-

führen zu können, war es deshalb notwendig, die Stufenhöhe der starken Linien direkt zu messen. Zu diesem Zwecke haben wir ein von WILSDORF und FOURIE ²⁵ an Messing praktiziertes Verfahren in etwas abgeänderter Form angewandt.

Hierbei werden sog. Latexkugeln, die auf etwa 5% genau einen Durchmesser von 188 mμ besitzen, auf die

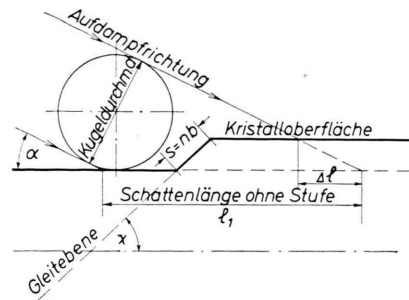


Abb. 17. Zur Bestimmung der Stufenhöhe mit der „Latex-Kügelchen-Methode“.

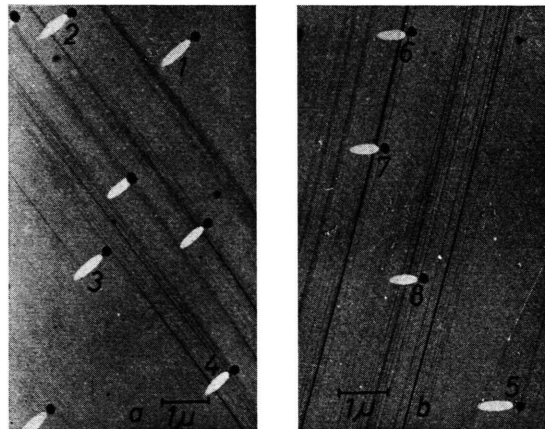


Abb. 18 a u. b. Schattenbilder von Latexkugeln zur Messung der Stufenhöhe von Gleitlinien.

vom Kristall abgenommene Abdruckfolie gebracht und zusammen mit der Folie unter einem verhältnismäßig flachen Winkel mit Palladium bedampft. Falls es nun möglich ist, durch geschickte Manipulationen die Kugeln nach dem „Beschatten“ vom Präparat zu entfernen, kann man, wie aus Abb. 17 zu ersehen ist, aus der Messung der Schattenlänge die Stufenhöhe berechnen. Im allgemeinen läßt sich jedoch der Winkel α der Aufdampfrichtung nicht exakt angeben; man muß deshalb eine Vergleichsmessung durchführen, wobei als Normal ein Schatten dient, der in einem gleitlinienfreien oder gleitlinienarmen Gebiet liegt. Ist l_1 die Schattenlänge dieses „Normals“, l_2 die Länge eines über eine Gleitstufe liegenden Schattens, d der Durchmesser der Latexkugeln, b der BURGERS-Vektor und χ der Winkel zwischen Gleitebene und Stabachse des Kristalls, dann gilt

²⁵ H. WILSDORF u. J. T. FOURIE, Acta Met. 4, 271 [1956].

am Scheitel des Kristalls für die Anzahl der in einer Linie enthaltenen Versetzungen

$$n = \frac{l_1 - l_2}{\sqrt{l_1^2 - d^2}} \frac{d}{b \sin \chi} \quad (10)$$

In Abb. 18 a und 18 b haben wir eine Auswertung dieses Verfahrens vorgenommen und in Tab. 6 die hieraus ermittelten Stufenhöhen zusammengestellt. Für die Stufenhöhen der starken Linien findet man danach etwa $100b$. Dieser Wert stimmt dann recht gut mit dem aus $\tau_{III}(0)$ berechneten von $n = 116$ überein.

| Abb. | Bezeichnung d. Schattens | Nach Gl. (10) berechnete Stufenh. | Bemerkungen |
|------|--------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 18 a | 1 | Vergleichsnormal | — |
| | 2 | 125 | 2 mittelstarke Linien |
| | 3 | 76 | 1 mittelstarke Linie |
| | 4 | 162 | 1 starke und mehrere schwache Linien |
| 18 b | 5 | Vergleichsnormal | — |
| | 6 | 186 | 1 starke und 1 mittelstarke Linie |
| | 7 | 186 | 1 starke und 1 mittelstarke Linie |
| | 8 | 207 | 4 mittelstarke Linien |

Tab. 6. Ergebnisse der Auswertung von Abb. 18 a und 18 b.

5. Messungen an Aluminium

a) Verfestigungskurven

Unsere Untersuchungen über das Verfestigungsverhalten von Aluminium wurden an acht Einkristallen, die wir bei verschiedenen Temperaturen unter-

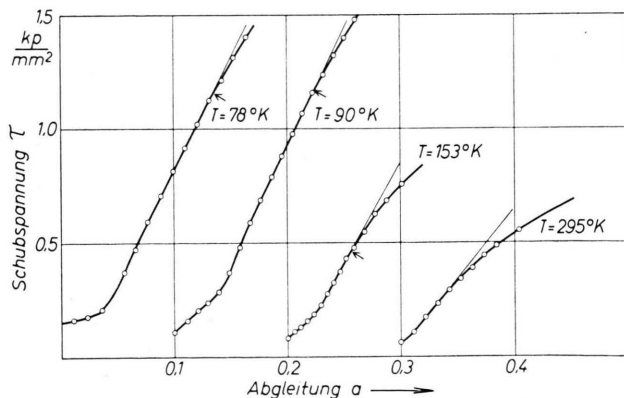


Abb. 19. Verfestigungskurven von Aluminiumeinkristallen bei verschiedenen Temperaturen; Pfeile bezeichnen τ_{III} -Werte; $\dot{a} \sim 9 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

²⁶ R. L. FLEISCHER u. W. A. BACKOFEN, Veröffentlichung demnächst.

²⁷ A. SOSIN u. J. S. KOEHLER, Phys. Rev. **101**, 97 [1956].

halb Raumtemperatur im Zugversuch verformten, durchgeführt. Einige der hierbei gemessenen Kurven sind in Abb. 19 aufgetragen und die Verfestigungskenngrößen aller verformten Kristalle in Tab. 7 zusammengestellt. Da es uns bei diesen Versuchen, ebenso wie bei Gold, in erster Linie auf die Bestimmung der Stapelfehlerenergie ankam, haben wir der Einfachheit halber die Verfestigungskurven nur bis zum Beginn von Bereich III untersucht.

b) Die Temperaturabhängigkeit von τ_{III}

Zur Bestimmung der Stapelfehlerenergie haben wir unseren Messungen noch diejenigen, die von FLEISCHER und BACKOFEN²⁶, NOGGLE¹⁴, NOGGLE und KOEHLER¹⁵ und SOSIN und KOEHLER²⁷ ebenfalls an Aluminiumeinkristallen durchgeführt wurden, hinzugefügt. Hierbei wurden nur solche Kristallorientierungen verwendet, die mit der unserigen nahezu identisch waren. In Tab. 8 sind die aus den Messungen dieser Autoren entnommenen τ_{III} -Werte angeführt. Die zur Messung von $B(0)$ notwendige Auftragung von $\ln \tau_{III}$ über T erfolgte in der bei Kupfer und Gold praktizierten Weise (Abb. 20). In dieser Abbildung sind die aus Tab. 8 stammenden τ_{III} -Werte mit ausgefüllten Kreisen bezeichnet. Zur Berechnung der Temperaturfunktion $F(T)$ wurde die Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten von SUTTON²⁸ und diejenige der Gitterkonstanten aus Messungen von HUME-ROTHERY und STRAWBRIDGE²⁹ entnommen.

Die Linearität von $\ln \tau_{III}/G$ und T ist nach Abb. 20

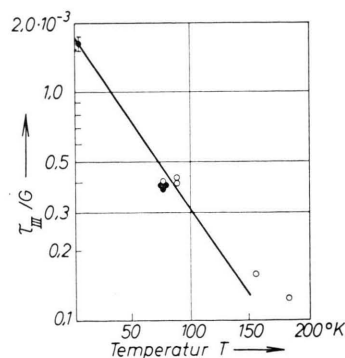


Abb. 20. Halblogarithmische Auftragung von τ_{III}/G und T zur Bestimmung der Stapelfehlerenergie für Al. o eigene Messungen; ● Messungen der in 14, 15, 26, 27 zitierten Autoren.

²⁸ P. M. SUTTON, Phys. Rev. **91**, 816 [1953].

²⁹ W. HUME-ROTHERY u. D. J. STRAWBRIDGE, J. Sci. Instrum. **24**, 89 [1947].

allerdings nicht so gut erfüllt, wie dies bei Kupfer und Gold der Fall war. Wir haben durch die bei 4 °K, 78 °K und 90 °K liegenden Punkte eine Gerade gelegt und somit die bei höheren Temperatu-

| T [°K] | τ_0 [p/mm ²] | ϑ_{II} [kp/mm ²] | ϑ_{II_2} [kp/mm ²] | τ_{III} [kp/mm ²] | $10^4 \frac{\tau_{III}}{G}$ |
|-------------|----------------------------------|---|---|---------------------------------------|-----------------------------|
| 78 | 145 | 10,45 | 9,70 | 1,17 | 4,08 |
| 90 | 90 | 10,28 | 9,09 | 1,15 | 4,02 |
| 90 | 110 | 11,40 | 10,12 | 1,15 | 4,02 |
| 90 | 130 | 10,96 | 9,66 | 1,2 | 4,20 |
| 152 | 85 | — | 8,5 | 0,45 | 1,62 |
| 178 | 95 | — | 9,2 | 0,35 | 1,27 |
| 202 | 95 | — | 6,38 | (0,53) | — |
| 295 | 66 | — | 6,35 | (0,3) | — |

Tab. 7. Verfestigungskenngrößen von Aluminium.

| Herkunft der Werte | T [°K] | τ_{III} [kp/mm ²] | $10^4 \tau_{III}/G$ |
|------------------------------|-------------|---------------------------------------|---------------------|
| NOGGLE und KOEHLER | 4 | 4,5—5 | 13,8—15,2 |
| | 78,5 | 1,13 | 3,45 |
| | 295 | 0,2 | 0,77 |
| FLEISCHER und BACKOFEN | 78,5 | 1,13 | 3,48 |
| | 295 | 0,29 | 1,12 |
| SOSIN und KOEHLER | 78,5 | 0,9—1,3 | 2,8—4,0 |

Tab. 8. Aus Al-Verfestigungskurven verschiedener Autoren entnommene τ_{III} -Werte.

ren liegenden Werte vernachlässigt. Nach dem von WOLF¹³ ermittelten Zusammenhang von $\ln \tau$ und U ist dies gerechtfertigt; danach besteht nämlich für Spannungen, die kleiner als $0,2 \cdot 10^{-3} G$ sind, im allgemeinen kein linearer Zusammenhang mehr. Für die Steigung und den Ordinatenabschnitt der in Abb. 20 eingezeichneten Geraden findet man:

$$B(0) = 17 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$$

$$\text{und } \tau_{III}(0) = 5,03 \text{ kp/mm}^2.$$

Nach Gl. (4) ergibt sich daraus:

$$A(0) = 0,13 \text{ eV bzw. } G b^3/A = 32.$$

Mit der dimensionslosen Größe $G b^3/A$ findet man aus dem numerisch ermittelten Zusammenhang von A und γ :

$$\gamma/Gb = 34 \cdot 10^{-3} \text{ bzw. } \gamma(295^\circ\text{K}) = 238 \text{ erg/cm}^2.$$

c) Die Temperaturabhängigkeit weiterer Kenngrößen

Von den in Tab. 7 angegebenen Verfestigungskenngrößen haben wir auch die kritische Schubspannung und den Verfestigungskoeffizienten des Be-

reichs II näher betrachtet und hierzu diese Größen in Abb. 21 und 22 über der Temperatur aufgetragen. Die kritische Schubspannung nimmt hiernach mit steigender Temperatur etwas ab, und zwar scheint diese Abnahme bis zu 120–150 °K stärker zu erfolgen als bei den höheren Temperaturen. Ganz ähn-

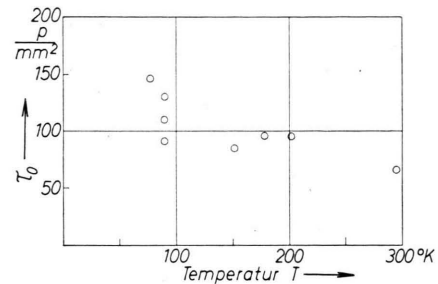


Abb. 21. Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung für Aluminium.

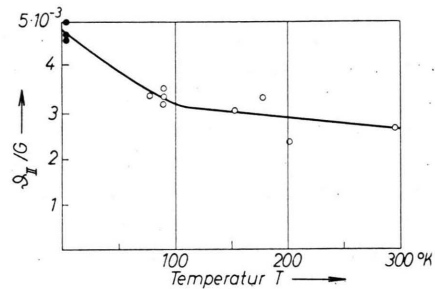


Abb. 22. Dimensionsloser Verfestigungskoeffizient des Bereichs II bei Aluminium. ○ eigene Messungen; ● Messungen der in 14, 15, 26, 27 zitierten Autoren.

lich wie bei der kritischen Schubspannung ist der Temperaturverlauf von ϑ_{II}/G . Auch hier ist unterhalb von etwa 120 °K die Zunahme dieser Größe mit abnehmender Temperatur stärker als bei den höheren Temperaturen.

6. Diskussion der Ergebnisse

a) Zusammenstellung der experimentellen Daten zur Bestimmung der Stapelfehlerenergie

In Tab. 9 haben wir in derselben Weise wie in Tab. 1 bei SEEGER, BERNER und WOLF¹⁰ die von uns gemessenen Stapelfehlerenergien für Kupfer, Gold und Aluminium zusammen mit den hierzu notwendigen experimentellen Konstanten eingetragen. Die nochmalige Zusammenstellung dieser Tabelle war erforderlich, da wir bei Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit des Schubmoduls für die Metalle mit kleiner Stapelfehlerenergie relativ starke

| Metall | Au | Ag | Cu | Ni | | Al |
|---|-----------|------------------------------------|--------|---------------------|---------------------|-----------|
| $\tau_{III}(0)$ [kp/mm ²] | 2,23 | 5,2 | 14,63 | 12,3 | 6,6 | 5,03 |
| $B(0)$ [$10^{-3}/^{\circ}\text{K}$] für $T = 0^{\circ}\text{K}$ | 2,27 | $\sim 2,7$ | 5,20 | 3,11 | 3,11 | ~ 17 |
| Herkunft der experimentellen Werte: | Abb. 13 | ANDRADE u. HENDERSON ²⁴ | Abb. 5 | HAASEN ⁵ | LEITZ ³⁰ | Abb. 20 |
| b [10^{-8}cm] | 2,88 | 2,88 | 2,55 | 2,48 | | 2,86 |
| G_2 [10^3kp/mm^2] für $T = 0^{\circ}\text{K}$ | 2,75 | 3,01 | 4,67 | 8,53 | | 2,90 |
| G_3 [10^3kp/mm^2] für $T = 295^{\circ}\text{K}$ | 2,42 | 2,60 | 4,16 | 7,48 | | 2,51 |
| $\ln(a_0 \cdot 1\text{sec})$ | 17,3 | 17,6 | 18,0 | 18,0 | | 18,2 |
| $A(0)$ [eV] für $T = 0^{\circ}\text{K}$ | 0,922 | $\sim 0,78$ | 0,414 | 0,68 | 0,68 | 0,13 |
| $G_2 b^3/A$ | 4,06 | $\sim 5,0$ | 11,3 | 12,0 | 12,0 | 32 |
| $10^3 \cdot \gamma/G_3 \cdot b$ | 1,48 | $\sim 3,75$ | 15,4 | 16,2 | 16,2 | 34 |
| γ [erg/cm ²] für $T = 295^{\circ}\text{K}$ | ~ 10 | ~ 29 | 163 | 300 | 300 | 238 |
| n | 116 | ~ 51 | 23 | 50 | 92 | 28 |
| $2\eta_0$ Stufenvers. | ~ 36 | — | 3,5 | 3,0 | | 1,8 |
| $\frac{2\eta_0}{b}$ für Schraubenvers. | ~ 11 | — | 1,5 | 1,1 | | 1,0 |

Tab. 9. Zusammenstellung der experimentellen Daten zur Bestimmung der Stapelfehlerenergie. Hierbei ist G_2 der nach SEEGER und SCHÖCK¹⁸ definierte Modul für die Wechselwirkung von Schraubenversetzungen und G_3 der bei der Scherung von $\{111\}$ -Ebenen auftretende Modul (siehe S. 609 bei SEEGER⁹).

Abweichungen gegenüber den früheren Angaben erhielten. Diese Tabelle wurde ebenso wie in der oben zitierten Arbeit für Nickel und Silber ergänzt. Für Nickel standen uns die Messungen von HAASEN⁵ und außerdem umfangreiche Untersuchungen von LEITZ³⁰ zur Verfügung; letztere hatten den Vorzug, in der von uns beschriebenen Weise durchgeführt und ausgewertet worden zu sein. Die Werte für Silber, die wir den Verfestigungskurven von ANDRADE und HENDERSON²⁴ entnahmen, dürfen nur mit Vorbehalt behandelt werden, da für die verformten Silberkristalle keine Orientierungsangaben vorhanden waren. Ferner sei noch einmal darauf hingewiesen, daß der für Gold angegebene Wert für die Stapelfehlerenergie mit der in Abschnitt 4 c angegebenen Unsicherheit behaftet ist.

Die an Kupfer, Gold und Aluminium gemessenen Stapelfehlerenergien werden wir dazu benützen, um in den Abschnitten d–f mit den in Abschnitt b und c angestellten allgemeinen Überlegungen einige spezielle Erscheinungen des plastischen Verhaltens dieser Metalle zu erklären.

b) Zusammenhang der Stapelfehlerenergie mit Vorgängen bei der plastischen Verformung

Wie in der Literatur^{11, 31, 32} schon gezeigt und von uns in der Einleitung erwähnt wurde, spielt die Stapelfehlerenergie in der Plastizität kubisch-flächen-

zentrierter Metalleinkristalle eine wichtige Rolle. Dieser Einfluß rührt davon her, daß die in den kubisch-flächenzentrierten Metallen enthaltenen Versetzungen in Halbversetzungen³³ aufspalten und hierbei zwischen den Halbversetzungen ein Stapelfehlerband aufspannen. Die bei der Bildung des Stapelfehlerbandes auftretende Oberflächenspannung ist bestrebt, die Aufspaltung gering zu halten, während die Wechselwirkung zwischen den Halbversetzungen diese Aufspaltung zu erweitern sucht. Für große Stapelfehlerenergien ist die Aufspaltungsweite der Versetzungen gering und umgekehrt. Diese Aufspaltungsweite bestimmt in starkem Maße den Anteil τ_s der Fließspannung, der durch die Schneidprozesse zustande kommt. An den beim Durchschneiden auftretenden Sprüngen müssen nämlich die Halbversetzungen zu einem Punkt zusammengebogen werden. Die Energie, die zur Bildung eines Sprunges notwendig ist, berechnet sich dann aus der Summe der Einschnürungsenergien der an der betreffenden Versetzungsreaktion beteiligten Versetzungen und der Bildungsenergie des eigentlichen Sprungs; die erstgenannten Energien sind um so größer, je stärker die Versetzungen aufgespalten sind bzw. je kleiner die Stapelfehlerenergie ist. Da die Einschnürungsenergie teilweise durch thermische Schwankungen aufgebracht werden kann, ist der Anteil τ_s , im Gegensatz zu τ_G , relativ stark temperaturabhängig.

³⁰ C. LEITZ, Diplomarbeit, TH Stuttgart 1960; Herrn LEITZ sei für die Überlassung seiner unveröffentlichten Ergebnisse vielmals gedankt.

³¹ A. SEEGER, Z. Naturforschg. **9 a**, 856 [1954].

³² A. SEEGER, Report Conf. Defects Solids, Phys. Soc., Lond. 1955, S. 328.

³³ R. D. HEIDENREICH u. W. SHOCKLEY, Report Conf. Defects Solids, Phys. Soc., Lond. 1948, S. 57.

Die von SEEGER²⁰ berechnete Temperaturabhängigkeit von τ_s wurde bereits in Gl. (6) angegeben.

Zahlenwerte für die Aufspaltungsweiten $2\eta_0/b$ von Stufen- und Schraubenversetzungen wurden für Au, Cu, Ni und Al nach Angaben von SEEGER und SCHÖCK¹⁸ berechnet und ebenfalls in Tab. 9 angeführt.

c) Die latente Verfestigung

Eine weitere zum Verständnis der Verfestigung kubisch-flächenzentrierter Metalle wichtige Größe, die ebenfalls in starkem Maße von der Stapelfehlerenergie abhängt, ist das Verhältnis der latenten zur primären Verfestigung. Bei kleiner Stapelfehlerenergie z. B. werden die zum Durchschneiden der Versetzungen notwendigen Aktivierungsenergien sehr groß und bewirken, daß der in der SEEGERschen Fließspannungstheorie vorhandene τ_s -Anteil auch für höhere Temperaturen in noch beachtlichem Maße vorhanden ist. Da nun im primären System um ein Vielfaches mehr Versetzungen vorhanden sind als im latenten, ist der Anteil der τ_s -Verfestigung für die Versetzungen des letzteren wesentlich größer als für das primäre System. Insgesamt kann somit bei kleiner Stapelfehlerenergie die Verfestigung des latenten Systems größer werden als die des primären Systems. Da der τ_G -Anteil der latenten Verfestigung, wie man durch Transformation der Spannungskomponenten ersehen kann, stets kleiner als derjenige der primären Verfestigung ist, finden wir bei kleinen Aktivierungsenergien der Schneidprozesse, also bei großen Stapelfehlerenergien, eine geringere Verfestigung des latenten Systems gegenüber dem primären.

d) Das Überschießen bei Goldeinkristallen

Das starke Überschießen der Goldkristalle ist nach SEEGER³⁴ ein qualitativer Indikator für eine kleine Stapelfehlerenergie. Die Frage, ob der Achsenpfad eines Kristalls die Symmetrale überschießt oder nicht, hängt nämlich von dem Verhältnis der latenten zur primären Verfestigung ab. Ist die latente Verfestigung größer als die des primären Systems, dann wird der Kristall überschießen, und zwar so lange, bis die Verfestigung in beiden Systemen

gleich groß geworden ist. Da eine große latente Verfestigung durch eine kleine Stapelfehlerenergie zustande kommt, tritt das Überschießen dann um so mehr in Erscheinung, je kleiner die Stapelfehlerenergie ist. Im umgekehrten Falle, also bei großer Stapelfehlerenergie und geringer latenter Verfestigung, wird die Stabachse nicht überschießen, sondern schon vor Erreichen der Symmetralen abbiegen, wie es tatsächlich bei Aluminium³⁵ beobachtet wird.

e) Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der kritischen Schubspannung bei Kupfer

Bei den Untersuchungen der Geschwindigkeitsabhängigkeit der kritischen Schubspannung wurde in Abschnitt 3 b zwischen τ_0 und $\ln \dot{\epsilon}$ ein linearer Zusammenhang gefunden. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit der Vorstellung, daß in dem untersuchten Temperaturbereich außer der elastischen Wechselwirkung der Versetzungen auch Schneidprozesse zur kritischen Schubspannung beitragen²⁰. Die Vermutung von ADAMS und COTTRELL³⁶ und FRIEDEL³⁷, daß die Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung bzw. Fließspannung in diesem Bereich nur von der Temperaturabhängigkeit des Schubmoduls herrührt, dürfte hiernach nicht richtig sein.

Bei der Anwendung von Gl. (6) auf unsere Meßergebnisse findet man ein temperaturabhängiges Aktivierungsvolumen. Dies kann, wie auch von MICHELITSCH²¹ diskutiert wurde, davon herrühren, daß entweder mehrere Aktivierungsenergien auftreten³⁸ oder daß das Aktivierungsvolumen von $(\tau - \tau_G)$ abhängt^{37, 39, 9}. CONRAD und SCHÖCK⁴⁰ haben an Magnesium gezeigt, daß die letztgenannte Vorstellung die Geschwindigkeits- und Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung von Magnesiumeinkristallen zu deuten gestattet. Die hier vorliegenden Meßergebnisse sind nicht ausreichend, um genauere Angaben hierzu zu machen. Unter der Annahme einer Abhängigkeit des Aktivierungsvolumens von $(\tau - \tau_G)$ ergeben überschlägige Rechnungen, daß die Aktivierungsenergie für den hier maßgebenden Prozeß zwischen 0,5 – 1,5 eV liegen muß. Diese Größenordnung ist im Einklang mit dem theoretischen Wert, den man mit Hilfe der aus der Sta-

³⁴ A. SEEGER, Z. Naturforschg. **11 a**, 985 [1956].

³⁵ G. J. TAYLOR u. C. F. ELAM, Proc. Roy. Soc., Lond. **108**, 28 [1925].

³⁶ M. A. ADAMS u. A. H. COTTRELL, Phil. Mag. **46**, 1187 [1955].

³⁷ J. FRIEDEL, Les Dislocations. Gauthier Villars, Paris 1956, Kap. 11.

³⁸ A. SEEGER, Z. Naturforschg. **9 a**, 758 [1954].

³⁹ N. F. MOTT, Phil. Mag. **1**, 568 [1956].

⁴⁰ H. CONRAD u. G. SCHÖCK, persönliche Mitteilungen.

pelfehlerenergie berechneten Einschnürungsenergien⁴¹ beim Durchschneiden von Stufenversetzungen angeben kann.

f) Die Temperaturabhängigkeit des Verfestigungskoeffizienten im Bereich II

Der dimensionslose Verfestigungsanstieg ϑ_{II}/G sollte theoretisch nach SEEGER¹² und SEEGER, DIEHL MADER und REBSTOCK³ unabhängig von der Temperatur sein. Beobachtet man jedoch eine Temperaturabhängigkeit dieser Größen, so bedeutet dies, daß Schneidprozesse zur Fließspannung beitragen und der zu schneidende Versetzungswald mit der Verformung seine Dichte ändert. Differenzieren wir Gl. (6) sowohl nach a als auch nach T , so findet man für die Temperaturabhängigkeit von ϑ_{II}/G folgenden Ausdruck:

$$\frac{d(\vartheta_{II}/G)}{dT} = \left[\frac{k \cdot \ln(N F b v_0)}{G v^2} \right] \frac{dv}{da}. \quad (12)$$

Da in der eckigen Klammer nur positive Größen stehen, ist für einen negativen Anstieg von ϑ_{II}/G auch dv/da negativ. Bei einer Abnahme von ϑ_{II}/G mit T wird sich somit mit zunehmender Verformung wegen der Abnahme des Aktivierungsvolumens die Dichte des Versetzungswaldes vergrößern.

Diese Zunahme der Walddichte hängt wiederum in starkem Maße von der Größe der Stapelfehlerenergie ab. Bei kleiner Stapelfehlerenergie ist, wie wir schon oben diskutierten, die latente Verfestigung groß; eine große latente Verfestigung hat aber für das entsprechende sekundäre Gleitsystem zur Folge, daß die Versetzungen sich nur wenig bewegen können und damit für die Hauptgleitebene praktisch keine Vergrößerung des Waldes bewirken. Im umgekehrten Falle aber, bei großer Stapelfehlerenergie und kleiner latenter Verfestigung, können sich die Versetzungen der sekundären Systeme infolge der geringen Verfestigung ihrer Gleitsysteme leicht bewegen und erzeugen deshalb mit zunehmender Abgleitung eine Vergrößerung der Walddichte.

Diese Überlegungen sind im Einklang mit der in Abb. 11 für Gold und in Abb. 22 für Aluminium dargestellten Temperaturabhängigkeit von ϑ_{II}/G . Bei Gold ist ϑ_{II}/G nämlich praktisch temperaturunabhängig, während bei Aluminium bis zu etwa 120 °K eine starke Abnahme dieser Größe mit der Temperatur festzustellen ist. Der flache Temperaturverlauf von ϑ_{II}/G oberhalb von 120–150 °K bei

Aluminium spricht dafür, wie auch die Messungen der kritischen Schubspannung (s. Abb. 21) zeigen, daß in diesem Temperaturbereich der Anteil der Schneidprozesse klein gegenüber dem τ_G -Anteil ist.

g) Die Bruchspannung τ_E

Um den in Abschnitt 4 a erwähnten linearen Zusammenhang von $\ln \tau_E$ und $\ln T/T_s$ auf allgemeinere Gültigkeit prüfen zu können, haben wir die aus einer früheren Arbeit⁶ zur Verfügung stehenden

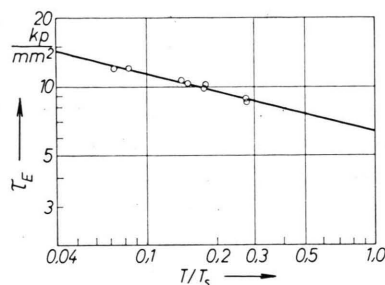


Abb. 23. Temperaturabhängigkeit der Bruchspannung τ_E für Kupfer; T_s (Schmelzpunkt) = 1356 °K.

τ_E -Werte für Kupfer in derselben Darstellung wie für Gold aufgetragen (s. Abb. 23). Auch hier läßt sich mit recht guter Näherung eine Gerade durch die Meßpunkte legen. Der Anstieg dieser Geraden ist dabei wesentlich kleiner als der bei Gold. Bei kritischer Betrachtung des Anstiegs $d \ln \tau_E / d \ln T$ zeigt sich, daß bei den beiden Metallen diese Anstiege proportional zu $A/G b^3$ sind. Für den Proportionalitätsfaktor $(G b^3/A) d \ln \tau_E / d \ln T$ finden wir nämlich für Gold 28,4 und für Kupfer 28,8.

Die an nur zwei Metallen gewonnenen Ergebnisse genügen natürlich nicht, um diese Gesetzmäßigkeit verallgemeinern zu können. Zu einer theoretischen Klärung dieses Zusammenhangs wären weitere Untersuchungen an einer Reihe von kubisch-flächenzentrierten Metallen notwendig. Von ANDRADE und HENDERSON²⁴ wurde zwar an einer relativ großen Auswahl verschiedener Metalleinkristalle die Bruchspannung gemessen, doch können wir unsere Ergebnisse mit diesen Messungen nicht ergänzen, da diese Autoren ihre Verfestigungskurven ohne Berücksichtigung der Doppelgleitung berechnet haben.

Herrn Professor Dr. U. DEHLINGER danke ich sehr für sein förderndes Interesse an der vorliegenden Arbeit. Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. A. SEEGER, der die Anregung zu dieser Arbeit gab und der durch seine fördernde Anleitung in hohem Maße die Durchführung dieser Untersuchungen unterstützte. Ferner danke

⁴¹ siehe hierzu Tab. 2 bei A. SEEGER et al.¹⁰.

ich den Herren Dr. J. DIEHL und Dr. S. MADER für zahlreiche Anregungen und Diskussionen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft und dem Max-Planck-Institut für Metallforschung habe ich für die Bereitstellung von Geräten und für finanzielle Unterstützung zu danken.

Anhang

Zur Theorie der Quergleitung

Von HAASEN⁵ wird angenommen, daß bei der Spannung τ und der Temperatur T für die Häufigkeit der stattfindenden Quergleitungen von Schraubenversetzungen folgende ARRHENIUSsche Beziehung gelte:

$$\nu = \nu_0 \exp\{-U(\tau)/kT\}. \quad (\text{A } 1)$$

$U(\tau)$ ist hier die bei der Spannung τ für den Quergleitungsprozeß notwendige Aktivierungsenergie; ν_0 ist ein temperaturunabhängiger Frequenz- und Entropiefaktor, der in der Größenordnung der DEBYE-Frequenz und in erster Näherung als proportional zu dieser angenommen werden kann; k ist die BOLZMANNsche Konstante. Die Spannung τ_{III} , die ein Anzeichen für die Quergleitung ist, wird beobachtet, wenn ν einen bestimmten kritischen Betrag, den wir mit ν_{krit} bezeichnen, überschreitet. Für den Beginn der Quergleitung gilt dann

$$\frac{\nu_{krit}}{\nu_0} = \exp\{-U(\tau_{III})/kT\}. \quad (\text{A } 2)$$

Wie SCHÖCK und SEEGER¹¹ in erster Näherung und WOLF¹³ in einer verfeinerten Theorie fanden, besteht für die Aktivierungsenergie der Quergleitung und der Schubspannung in der Gleitebene näherungsweise folgender logarithmischer Zusammenhang:

$$U = -A \cdot \ln \frac{\tau}{G} + C. \quad (\text{A } 3)$$

Führen wir die Spannung τ_{III} in die obige Gleichung ein und wählen dann die übrig bleibende Konstante so, daß die Aktivierungsenergie für $T = 0^\circ \text{K}$ sinngemäß verschwindet, dann erhalten wir folgende Beziehung:

$$U = -A \cdot \ln \frac{\tau_{III}/G}{\tau_{III}(0)/G(0)}. \quad (\text{A } 4)$$

Die in Gl. (A 4) vorkommenden Größen sind bereits in Abschnitt 1 erklärt worden. Ferner kann auf relativ einfache Weise gezeigt werden, daß die Frequenz ν , mit der die Quergleitungsprozesse erfolgen, der jeweiligen Abgleitgeschwindigkeit \dot{a} proportional sind*.

Für die Abgleitgeschwindigkeit \dot{a} ergibt sich deshalb ein zu ν analoger Ausdruck

$$\dot{a} = \dot{a}_0 \exp\{-U(\tau)/kT\}. \quad (\text{A } 5)$$

Setzt man den Wert für U aus Gl. (A 4) in Gl. (A 5)

ein, so ergibt sich der in Gl. (1) der Einleitung angegebene Zusammenhang

$$\ln \frac{\tau_{III}(T)/G(T)}{\tau_{III}(0)/G(0)} = \frac{kT}{A} \ln \frac{\dot{a}}{\dot{a}_0}. \quad (\text{A } 6)$$

Die Größe A tritt in dem von WOLF¹³ ermittelten Zusammenhang mit der Stapelfehlerenergie in der Kombination A/Gb^3 auf. Da nun bei der Messung der Geschwindigkeitsabhängigkeit von τ_{III} nur die Größe A allein vorkommt, ist es notwendig, um eine eventuelle Temperaturunabhängigkeit der Kombination A/Gb^3 erkennen zu können, die durch die Größen G und b auftretende Temperaturabhängigkeit zu eliminieren. Wir schreiben deshalb für A :

$$A = A(0) F(T). \quad (\text{A } 7)$$

$F(T)$ ist hierbei eine dimensionslose Temperaturfunktion von der Form

$$F(T) = \frac{G(T) b^3(T)}{G(0) b^3(0)} \quad (\text{A } 8)$$

und $A(0)$ der am absoluten Nullpunkt gültige Wert für A . Unter Berücksichtigung von Gl. (A 7) folgt dann für Gl. (A 6)

$$\ln \frac{\tau_{III}(T)/G(T)}{\tau_{III}(0)/G(0)} = \frac{kT}{A(0) F(T)} \cdot \ln \frac{\dot{a}}{\dot{a}_0} \quad (\text{A } 9)$$

bzw. in etwas umgeschriebener Form

$$\ln \frac{\tau_{III}(T)}{G(T)} = \ln \frac{\tau_{III}(0)}{G(0)} - \left\{ \frac{k}{A(0)} \cdot \ln \frac{\dot{a}_0}{\dot{a}} \right\} \frac{T}{F(T)}. \quad (\text{A } 10)$$

Bei der Herleitung der Temperaturabhängigkeit von τ_{III} wurde davon ausgegangen, daß es sich bei der Quergleitung um einen einzigen thermisch aktivierten Prozeß mit einer bestimmten Aktivierungsenergie handle. Es wäre auch der allgemeinere Fall denkbar, daß die Quergleitung nicht nach einem eindeutigen Reaktionsweg erfolgt, sondern daß eine Vielzahl solcher Wege zur Quergleitung beiträgt. Den Zusammenhang zwischen \dot{a} und τ_{III} könnte man dann in folgender Form

$$\dot{a} = \sum_i \dot{a}_{0i} \exp\{-U(\tau)/kT\} = \sum_i \dot{a}_{0i} \left[\frac{\tau_{III}/G}{\tau_{III}(0)/G(0)} \right]^{A_i/kT} \quad (\text{A } 11)$$

oder durch das entsprechende Integral hierzu anschreiben. Die Tatsache, daß bei einer festen Temperatur die Gl. (3) gilt, ist mit einem Ansatz dieser Form immer noch verträglich. Es würden dann bei tiefen Temperaturen Glieder mit kleinem A_i und großem \dot{a}_{0i} dominieren, während bei hohen Temperaturen das Umgekehrte der Fall ist. Ob nun die Vermutung, daß die Quergleitung nach einem eindeutigen Reaktionsweg erfolgt, richtig oder falsch ist, kann man feststellen, wenn man aus Gl. (A 11) den Ausdruck $d \ln \tau_{III} / d \ln \dot{a}$ berechnet. Wir

* Um bei Beginn der Quergleitung eine bestimmte Abweichung vom linearen Bereich II zu erhalten, ist eine definierte Zahl n von Quergleitungsprozessen notwendig. Erreicht man diese Abgleitung Δa in Δt sec, dann ist die Ab-

gleitgeschwindigkeit $\dot{a} = \Delta a / \Delta t$ und die Frequenz, mit der die Quergleitungsprozesse erfolgen, $\nu = n / \Delta t$; aus diesen beiden Gleichungen folgt sofort, daß \dot{a} proportional zu Frequenz ν ist.

finden hierfür

$$\frac{d \ln \tau_{III}}{d \ln \dot{a}} = k T \frac{\sum_i \dot{a}_{0i} \left[\frac{\tau_{III}/G}{\tau_{III}(0)/G(0)} \right]^{A_i/k T}}{\sum_i \dot{a}_{0i} \cdot A_i \left[\frac{\tau_{III}/G}{\tau_{III}(0)/G(0)} \right]^{A_i/k T}} = \frac{k T}{A'} \quad (\text{A } 12)$$

Liegt ein eindeutiger Reaktionsweg vor, so dominiert in Gl. (A 12) für alle Temperaturen ein und dasselbe Glied und wir erhalten

$$\frac{d \ln \tau_{III}}{d \ln \dot{a}} = \frac{k T}{A_i}, \quad (\text{A } 13)$$

wobei A_i eine von der Temperatur unabhängige Konstante sein muß. Tragen aber in Gl. (A 12) mehrere Glieder zur Quergleitung bei, dann müßte sich die Größe A' wegen der sich mit der Temperatur ändernden Gewichtsfaktoren $[(\tau_{III}/G)/(\tau_{III}(0)/G(0))]^{A_i/k T}$ als temperaturabhängig erweisen. Den experimentellen Nachweis, daß A temperaturunabhängig ist, haben wir an Kupfer durchgeführt.

Zur Mehrwertigkeit des skalaren magnetischen Potentials beim hydromagnetischen Stabilitätsproblem eines Plasmas

Von R. LÜST und E. MARTENSEN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. 15 a, 706—713 [1960]; eingegangen am 15. April 1960)

BERNSTEIN, FRIEMAN, KRUSKAL and KULSRUD have found a variational principle (energy principle) which provides a necessary and sufficient condition for the stability of a plasma configuration surrounded by a vacuum and an external conductor. In this energy principle the perturbed magnetic field in the vacuum is derived from a vector potential. In the present investigation the energy principle is formulated with the help of a magnetic scalar potential instead of the vector potential, which simplifies the application of the principle. The many-valued character of the scalar potential assures that this description is equivalent to that using the vector potential. The nature of this many-valuedness is thoroughly investigated.

In den letzten Jahren ist in einer ganzen Reihe von Arbeiten die Stabilität von hydromagnetischen Gleichgewichtskonfigurationen untersucht worden. Von BERNSTEIN et al.¹ ist zur Untersuchung dieses Problems ein Energieprinzip abgeleitet worden, dessen Anwendung insbesondere bei der Untersuchung von komplizierten Gleichgewichtskonfigurationen sehr zweckmäßig ist. In diesem Energieprinzip wird das magnetische Störfeld des Vakuums, das das Plasma umgeben soll, durch ein Vektorpotential \mathfrak{A} beschrieben. Dieses Vektorpotential wird durch bestimmte Bedingungen eindeutig einer beliebigen Verschiebung des im Gleichgewicht befindlichen Plasmas zugeordnet. Für mancherlei Zwecke, insbesondere für eine numerische Behandlung des Problems, ist es indessen praktischer, das magnetische Störfeld des Vakuums durch ein skalares Potential Φ an Stelle des Vektorpotentials zu beschreiben, da man dann nur eine Funktion zu bestimmen hat im Vergleich zu den drei Komponenten des Vektorpotentials. Das skalare magnetische Potential

kann aber auf Grund des dreifachen Zusammenhangs des Vakuumgebiets mehrwertig sein und ist daher durch die Differentialgleichung $\Delta \Phi = 0$ und seine auf den Berandungen vorgeschriebenen Normalableitungen noch nicht vollständig bestimmt; abgesehen von einer für das Problem unwesentlichen additiven Konstanten sind nämlich die „Perioden“ des skalaren Potentials zurächst noch offen.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, in welcher Weise die vollständige Bestimmung des skalaren magnetischen Potentials geschehen kann und welche Vereinfachung sich daraus für die Formulierung des Stabilitätsproblems ergibt. Hierbei wird wesentlich Gebrauch gemacht von Resultaten einer Arbeit von BLANK, FRIEDRICHS und GRAD², im folgenden kurz B.F.G. genannt. Ebenso werden eine Reihe von Bezeichnungen aus dieser Arbeit übernommen.

1. Das Stabilitätsproblem

Es werde eine Plasma-Gleichgewichtskonfiguration von beliebiger Geometrie mit torusförmigem

¹ I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL u. R. M. KULSRUD, Proc. Roy. Soc., Lond. A 244, 17 [1958].

² A. A. BLANK, K. O. FRIEDRICHS u. H. GRAD, Theory of MAXWELL's Equations without Displacement Current, Notes on

Magneto-Hydrodynamics V. AEC Research and Development Report NYO-6486, Institute of Mathematical Sciences, University, New York 1957.